Modellieren im Mathematikunterricht

JÜRGEN MAASZ, LINZ

Im Zentrum des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, der in den Lehrplänen und Kompetenzkatalogen für Standards und zentrale Reifeprüfungen gefordert wird, steht das Modellieren. Deshalb erinnere ich in diesem Beitrag zunächst daran, dass wir ebenso wie alle Schülerinnen und Schüler im Alltag ganz selbstverständlich modellieren, also Modelle der Realität bilden und nutzen. Das besondere an mathematischen Modellen ist, dass sie dazu beitragen können, die Qualität dieser Tätigkeiten zu verbessern, etwa genauere Vorhersagen zu machen oder etwas besser zu systematisieren und zu beeinflussen. Um ein wenig zur Motivation für realitätsbezogenen Mathematikunterricht beizutragen, skizziere ich in diesem Beitrag zudem einige Beispiele, die auf Diplomarbeiten basieren, die an der JKU in Linz geschrieben wurden. Die kleine Auswahl soll zeigen, wie vielfältig und gehaltvoll realitätsbezogener Mathematikunterricht sein kann.

1. Ausgangspunkt: Auch realitätsbezogen Mathematik unterrichten – nicht nur „teaching to the test“

Seit einiger Zeit intensivieren sich die Klagen auch sehr engagierter Lehrerinnen und Lehrer darüber, dass Schülerinnen und Schüler unterstützt von ihren Eltern, ebenso wie Kolleginnen und Kollegen und allen voran die Schulleitung darauf drängen, dass im Unterricht möglichst viel und gut Maturaaufgaben-Lösen trainiert wird, damit die zentrale schriftliche Reifeprüfung in dieser Klasse an dieser Schule möglichst gut bestanden wird. Alle anderen Inhalte und Themen des Unterrichts, die selbstverständlich nach wie vor und ganz zu Recht im Lehrplan gefordert werden, werden immer seltener unterrichtet. Das macht den Mathematikunterricht noch weniger attraktiv. Selbstverständlich fragen Eltern und Lernende: Wozu der ganze Aufwand? Was haben wir davon, wenn wir gelernt haben, all die Aufgaben im Test (der nächsten Schularbeit, der schriftlichen Reifeprüfung, einer mündlichen Leistungsüberprüfung) richtig zu lösen? Was wir hier machen (genauer: gemacht haben, denn die folgende Kritik kommt erst nach der Matura) hat doch keinen Sinn, weil es uns nach der Matura nicht nützt. Wer etwa ein MINT-Fach studiert, merkt schnell, dass hier mehr und andere Mathematikkenntnisse verlangt werden als die für die Tests antrainierten.

So verschärft diese den Blick auf Mathematik sehr einengende Art zu unterrichten die ohnehin schon kritische Haltung zum Mathematikunterricht, die bei vielen Erwachsenen zu beobachten ist. Empirische Forschungen in vielen Ländern der Welt (auch eigene in Linz – vgl. Maaß 1994) zeigen zwei Hauptresultate des Mathematikunterrichts:

1. Wenig Kenntnisse in Mathematik: Einige Jahre nach der Schule ist nur das gut verfügbar, was in Beruf und Alltag oft gebraucht wird.

2. Häufig eine negative Einstellung zur Mathematik

Das ist sehr unerfreulich. So viel Aufwand und so wenig Erfolg, ja sogar ein eher negativer Gesamteffekt sind nicht wünschenswert. Leute mit solch ablehnender Erinnerung an ihren Unterricht und negativer Einstellung zur Mathematik begegnen uns an vielen Stellen, auch als Vertretung der Regierung (des Unterrichtsministeriums) in Verhandlungen über weitere Stundenkürzungen für den Mathematikunterricht. Auf der einen Seite gibt es viele populäre Forderungen nach neuen (nicht mathematischen) Inhalten für den Unterricht und auf der anderen Seite den ganz unpopulären Mathematikunterricht. Wie werden diese Verhandlungen in Zukunft ausgehen? Bekommen wir Unterstützung durch die Medien? Sicher nicht: Erinnern Sie sich noch an die Schlagzeilen auf den Titelseiten „Sieben Jahre Mathe sind genug!“ im Anschluss an die Habilitationsschrift des Bielefelder Kollegen Heymann?

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 50, 2017, S 55-69.

Es gibt sehr viele gute Vorschläge dazu, wie Mathematikunterricht attraktiver gemacht werden kann: Realitätsbezogener Mathematikunterricht ist nur einer davon, der neben vielen anderen nicht neu erfunden, sondern „nur“ verstärkt umgesetzt werden soll. Weshalb? Er gibt eine unmittelbar einsichtige Antwort auf die Frage nach dem Sinn!

2. Modelle im Alltag

Das Wort „Modell“ begegnet uns im Alltag an vielen Stellen, vom Fotomodell über die Modelleisenbahn und die Kunst, wo jemand, der „Modell“ steht, z. B. mit Materialien wie Ton oder Stein modelliert wird bis hin zu verschiedenen Wissenschaften, in denen es sogar verschiedene Modelltheorien gibt. Zum Einstieg ins Nachdenken über Modelle in der Mathematik verwende ich eine Grafik, die einen anderen als den bisher im Umkreis von ISTRON üblicherweise verwendeten Modellierungskreis (vgl. Kaiser/Henn 2015) zeigt, nämlich einen wesentlich allgemeineren. Die Grafik (Abb. 1) zeigt Menschen, Realität und Modelle in einer jeweiligen Wechselbeziehung.

Die zentrale Botschaft dieser Grafik ist, dass wir alle in unserem Umgang mit dem, was wir als Realität verstehen, ganz selbstverständlich Modelle verwenden. Die zweite zentrale Botschaft ist die jeweilige Wechselwirkung zwischen Mensch, Realität und Modell. Menschen kreieren Modelle und verändern – auch mit diesen Modellen – Realität; die Realität hat offenbar Einfluss auf Menschen und Modelle, mit denen sie beschrieben und verändert werden soll.

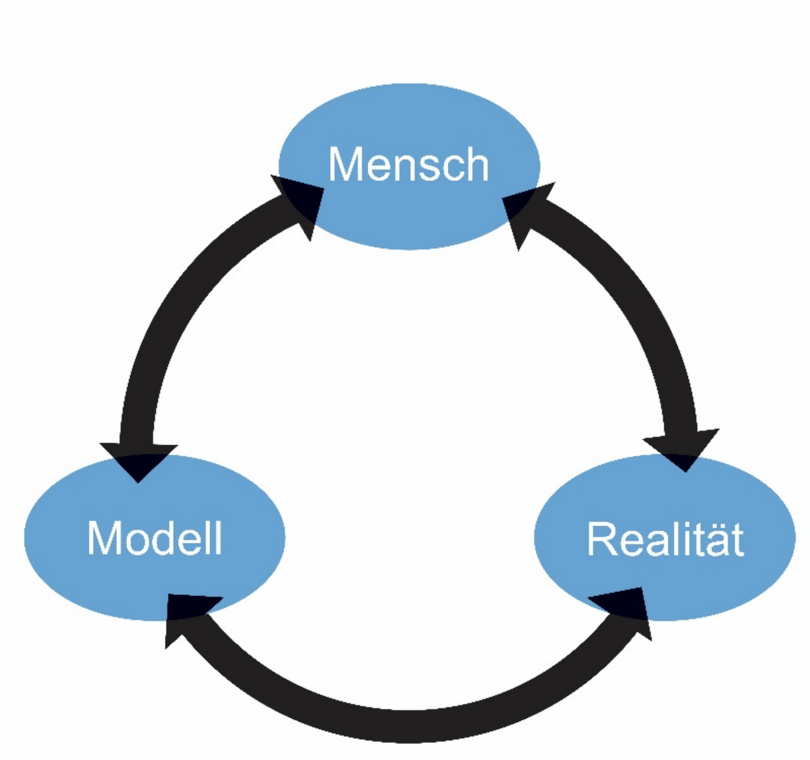


Abb. 1: Modellierungskreislauf

Zur Erläuterung dieser Basisform (eine detaillierte Version folgt unten – Abb. 2) diskutiere ich zunächst ein paar einfache Beispiele. Wenn ich einkaufen gehe, verwende ich Modelle von Objekten, Leuten und Verhaltensweisen, um z. B. einen Weg zu planen oder eine Einkaufsliste zu schreiben. Wenn ich den Bäcker um die Ecke besuchen will, denke ich nicht lange über den Weg dorthin nach, ich habe ihn – als Modell, z. B. als Ausschnitt einer Stadtkarte oder als Folge von Wegstücken – im Kopf. Natürlich habe ich nicht den Weg selbst (als Materie, gleichsam den ganzen Bürgersteig, die angrenzenden Häuser mit Tonnen von Steinen etc.) im Kopf, sondern eine Vorstellung davon bzw. eine Erinnerung daran, wie der Weg beim letzten Gang zum Bäcker war. Der Unterschied von einem Modell des Weges, bei dem ich Wegstücke mit Erinnerungen kombiniere (etwa: aus der Haustür links bis zur Ecke, dann über die Straße und weiter bis zum Eingang des Ladens) und einer Karte der Stadt ist auch ein Unterschied in dem Grad der Mathematisierung des Modells. Wenn ich zudem ausprobieren will, ob mein neues Smartphone mir mit GPS den gleichen Weg weist, erlebe ich die Funktion eines extrem höher entwickelten mathematischen Modells. In GPS, dem Smartphone etc. steckt sehr viel Mathematik. Beides sind schöne Beispiele für mathematische Technologie, die als Black Box funktioniert, auch wenn ich die verwendete Mathematik nicht verstehe oder keine Ahnung davon habe, dass hier überhaupt Mathematik und nicht Magie zum Einsatz kommt!

Ich erweitere das Einkaufsbeispiel, um an einen weiteren Aspekt des Modellbildens zu erinnern, der uns im Alltag sehr geläufig ist. Wenn ich nicht zum Bäcker um die Ecke gehen will, sondern zum ersten Mal in ein neu gebautes Einkaufszentrum vor den Toren der Stadt fahren will, brauche ich zur Planung der Fahrt vielleicht ein besser als solches erkennbares Modell, einen Stadtplan oder einen Plan des öffentlichen Nahverkehrs, um zu erkunden, wie ich dorthin gelange. Vielleicht frage ich auch jemanden, der oder die schon dort gewesen ist und den Weg kennt, nach einer Wegbeschreibung (= einem Modell des Weges!). Mit anderen Worten: Ohne lange theoretisch über Modellierung nachzudenken, versuche ich mein Modell des Weges dorthin so zu verbessern, dass ich tatsächlich zum gewünschten Ziel gelange. Dabei gehe ich pragmatisch vor, die (zu erwartende oder erlebte) Praxis hilft mir zu entscheiden, wann eine Lösung gut genug ist. Auf keinen Fall fahre ich erst dann los, wenn ich mathematisch korrekt bewiesen habe, dass die gewählte Fahrtroute optimal ist.

2.1. Zur Rolle der Mathematik beim Modellieren

Und wo bleibt die Mathematik? Die Modellierung mit mathematischen Methoden ist in der Forschung selbstverständlich. Forschungsberichte aus Natur- und Sozialwissenschaft enthalten ebenso wie solche aus anderen Bereichen der Wissenschaft üblicherweise mathematische Formeln (manche Menschen nennen diese Formeln „Gesetze“ in der Hoffnung, dass sich Natur und Gesellschaft an diese „Naturgesetze“ halten mögen) und als Begründungen für die Richtigkeit der Ergebnisse bzw. die Korrektheit der Forschungsmethoden Verweise auf benutzte Mathematik.

Meine zentrale These für die Rolle der Mathematik beim Modellieren ist, dass ihr Einsatz die Qualität aller Modelle verbessert, in denen Regelmäßigkeiten mit Formeln oder Gleichungen bzw. Gleichungssystemen beschrieben und damit auch vorhergesagt werden können. Die Geschichte der Naturwissenschaften ist ein so reichhaltiger Beleg für meine These, dass ich hier zur Begründung nur an Astronomie und Navigation sowie an Mechanik und Analysis erinnere. Wer dennoch an der These zweifelt, ist eingeladen, unter dem Stichwort „Industriemathematik“ oder „Technomathematik“ im Internet zu suchen. Die Suchergebnisse verstärken den Eindruck, dass mathematische Modellierung für eine große Menge von Aspekten der Realität eine genauere und tiefer gehende Einsicht und Veränderungsmöglichkeit eröffnet. Das gilt insbesondere für naturwissenschaftliche, technische und ökonomische Themen; wenn hingegen individuelle menschliche Verhaltensweisen oder psychologische Faktoren modelliert werden sollen, zeigen sich schnell Grenzen sinnvoller mathematischer Modellierung.

Im Alltag der meisten Menschen sind explizite Modellierungen mit mathematischen Methoden eher selten bzw. sie werden wie bei Steuern, Prozenten beim Einkauf oder geometrischen Überlegungen (wie weit ist es bis zum Einkaufszentrum?) nicht als mathematische Modelle erkannt. Ich fürchte, dass deshalb viele Menschen eine Möglichkeit zur rationaleren Entscheidungsfindung bzw. zum besseren Verständnis von gesellschaftlichen, wirtschaftlichen und ökologischen Entwicklungen verpassen und plädiere auch deshalb für realitätsbezogenen Mathematikunterricht.

Um auf die mögliche Rolle der Mathematik beim Modellieren auch optisch deutlicher hinzuweisen, erweitere ich die Grafik im Bereich „Modell“: Abb. 2.

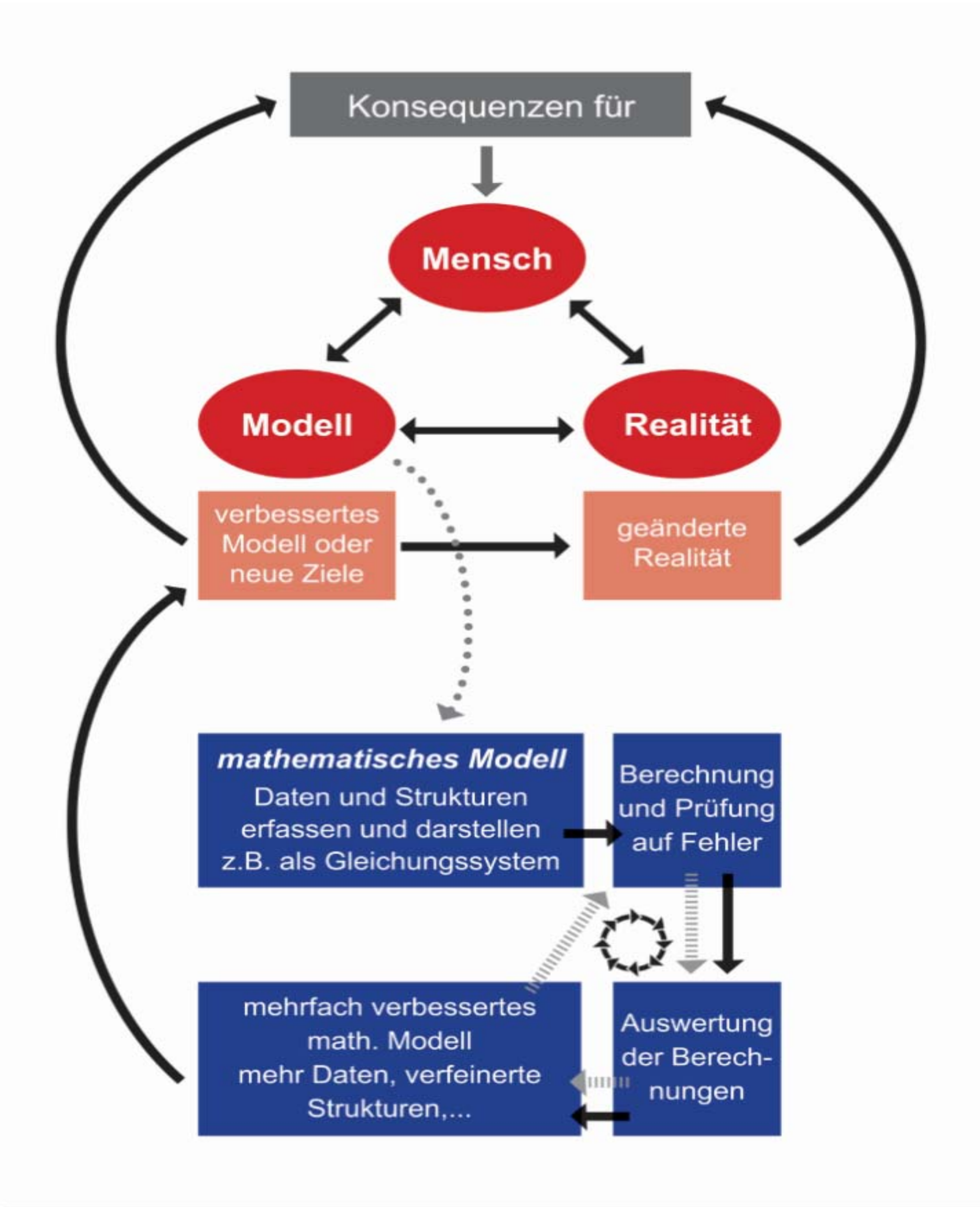


Abb. 2: Detaillierter Modellierungskreislauf

Die Arbeit am mathematischen Modell steht hier im Mittelpunkt des unteren Teils der Grafik, der gleichsam mit einer Lupe in den Bereich „Modell“ hineinschaut. Mit dem Ziel, ein mathematisches Modell zu erstellen, werden aus dem ursprünglichen Modell jener Aspekte der Realität, die zu erkennen oder zu verändern sich der Menschen zum Ziel gesetzt hat, die benötigten Daten samt ihrer Struktur herausgefiltert. Wichtig ist, dass es hier nicht einfach eine TOP => DOWN-Struktur gibt, in der ein planender Mensch die Wirklichkeit nach seinem Willen modelliert und mathematisiert – auch wenn viele Menschen gern so etwas tun könnten. Tatsächlich geht es um vielfältige Wechselwirkungen. Schon bei der Auswahl von zu beachtenden Aspekten der Realität geht als ein Kriterium mit ein, welche Aspekte denn überhaupt sinnvoll mathematisch beschreibbar sind. Emotionen und andere psychologische Aspekte bleiben deshalb ebenso unbeachtet wie soziale Beziehungen oder Esoterisches. Nicht zuletzt bestimmen der Umfang und die Qualität des mathematischen Wissens, was denn überhaupt als sinnvoll mathematisierbar angesehen wird. Wer noch nie etwas von numerischen Lösungen für komplexe Differentialgleichungssystemen zur Beschreibung von Strömungen gehört hat, wird sich vermutlich nicht vornehmen, den Bug eines Schiffes mit mathematischen Mitteln zu optimieren.

In Abb. 2 wird versucht, der Dynamik einer Modellierung insofern Rechnung zu tragen, als optisch mehrere Durchläufe eingezeichnet sind (vgl. der kleine Kreis im Teil mathematische Modellierung rechts unten). Der untere Teil, die mathematische Modellierung, ist eigentlich „nur" ein besonderer Bestandteil der Modellierung, eine spezifische und in gewisser Hinsicht besonders effektive Methode der Modellierung.

Wenn die mathematische Arbeit im engeren Sinn für die erste mathematische Modellierung getan ist, ergeben sich daraus häufig Wünsche an die Modellierung und Versuche, sie durch bessere Daten, mehr Information über die Struktur der Daten oder das gezielte Nicht-Beachten bestimmter Aspekte des Modells zu verbessern. Auch nach besserer mathematischer Modellierung im Sinne von Verwendung von „mehr" Mathematik (z. B. Differentialgleichungssystem statt Lineare Näherung) wird häufig gesucht. Es gibt keine fixe Regel dafür, nach wie vielen solcher Durchläufe das Ergebnis den Wünschen entspricht oder die weitere Arbeit an diesem Thema aufgrund von Zeitmangel, fehlenden weiteren Möglichkeiten zur Modellverbesserung oder anderen Gründen abgebrochen werden muss. In diesem Zusammenhang sei noch ausdrücklich erwähnt, dass auch die EDV eine wichtige Rolle spielt: Die Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes von mathematischer Software haben einen großen Einfluss auf die Auswahl von Themen, Aspekten der Modellierung und auf die Chancen, zu einem adäquaten Ergebnis zu kommen. Viele Themen können heute in der Forschung, der Industrie und in der Schule nur deshalb thematisiert werden, weil die EDV hinreichende Unterstützung bietet.

Die Kästen für „verbessertes Modell oder neue Ziele" und „geänderte Realität" sollen daran erinnern, dass die (mathematische) Modellierung Folgen haben kann und soll, die ihrerseits wiederum Rückwirkungen auf den Menschen haben können und sollen. Eine mögliche Rückwirkung etwa einer forschenden Modellierung sind häufig neue Einsichten und Fragen, die zu neuen Modellierungen führen.

Einer Anregung von Irene Grafenhofer (Koblenz) folgend, die ich gern aufnehme, weise ich an dieser Stelle ausdrücklich darauf hin, dass der untere (blaue) Teil der Grafik, in dem spezifisch auf mathematische Modellierung hingewiesen wird, auch durch einen (z.B. grünen) Teil ersetzt oder ergänzt werden kann, in dem z. B. biologisches, chemisches, physikalisches, ökonomisches etc. Modellieren dargestellt wird. Ganz offensichtlich gelingt das Modellieren dann besonders gut, wenn Wissen aus allen relevanten Quellen einbezogen wird.

Die dritte und letzte Grafik im Exkurs zur Modellierung soll visualisieren, dass es hier um einen offenen Prozess geht, der zu einem ungewissen Ende führt: Abb. 3.

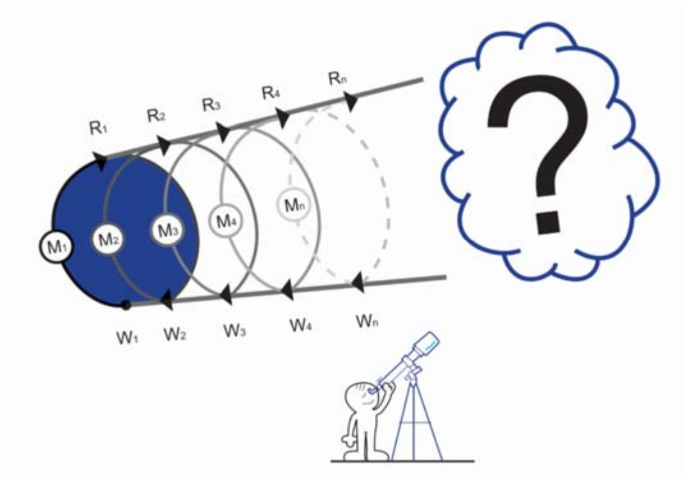


Abb. 3: Modellierungskreislauf – perspektivisch

Ausgangspunkt sind wieder WIR, also Menschen, die etwas verstehen oder verändern wollen, dazu modellieren und Konsequenzen für die Realität bewirken. Diese Konsequenzen oder andere Motivationen führen zu erneuten Anstrengungen, zu neuen und hoffentlich besseren Modellen, die wiederum Auswirkungen auf die Realität haben. Wann und wie die Bemühung um eine Verbesserung der Erkenntnis oder der Realität endet, ist zu Beginn prinzipiell ebenso offen wie die abschließende Bewertung des Prozesses: Ist tatsächlich (bzw. aus wessen Sicht?) eine Verbesserung erreicht worden?

Am Anfang steht eine Entscheidung: der Wunsch, etwas zu erkennen, etwas besser zu verstehen, zu verändern, schneller zu erreichen, mit wenig(er) Aufwand zu steuern oder Ressourcen möglichst effizient einsetzen zu können. All das und viel mehr kann als Motivation dienen. Nachdem ein Aspekt der Realität ausgewählt wurde, der mit mathematischen Methoden genauer betrachtet werden kann und soll, werden Daten und Gesetzmäßigkeiten gesucht, mit denen diese Daten verknüpft sind. Zu Beginn sind meist nicht alle notwendigen Daten vorhanden und nicht immer ist klar, in welcher Weise die Daten mit Hilfe des mathematischen Werkzeugkastens strukturiert werden können bzw. durch einen mathematischen Zusammenhang dargestellt oder beschrieben werden können.

Der Start im ersten Durchlauf beruht deshalb oft auf Schätzungen und sehr einfachen Mathematisierungen. Es werden zunächst (mathematische) Modelle erstellt von denen bekannt ist, dass sie keinesfalls alle Parameter berücksichtigen. Trotzdem werden schon bald Berechnungen angestellt, damit sowohl das Ergebnis als auch der Weg dahin interpretiert werden können. Die Interpretation kann in verschiedene Richtungen führen. Die ersten Ergebnisse verursachen oft Kopfschütteln: entweder ist das Ergebnis im Hinblick auf seine Aussagekraft oder Erklärungsmächtigkeit nicht zufriedenstellend. Meist kann aber aus der Interpretation des ersten Anlaufes geschlossen werden, wie weiter vorgegangen werden soll.

Typische Fragestellungen, die daraus resultieren, sind Fragen nach genaueren oder zusätzlichen Daten, nach komplexeren mathematischen Werkzeugen oder die Frage nach Präzisierung der Fragestellung bzw. der Zielsetzung. Sobald eine oder mehrere dieser Fragen durchdacht sind, wird ein zweiter Versuch durchgeführt, dessen Ergebnis wiederum interpretiert werden muss.

Analog zum ersten Durchgang müssen die handelnden Personen entscheiden, ob und wie es weitergeht. Das ist oft eine subjektive Entscheidung, die von Zeit und Fähigkeiten, Motivation und vielen Faktoren abhängt, aber nicht objektiv durch die Mathematik vorgegeben ist (wie etwa bei einem bestimmten Beweis eines Satzes). Nach einigen Durchgängen haben die handelnden Personen meist mit genügend großer Genauigkeit herausgefunden, was sie wissen wollten oder merken, dass sie trotz aller Bemühungen nicht weiterkommen, weil z. B. bessere Daten nicht zugänglich sind, mathematische Darstellungen die kognitiven Fähigkeiten übersteigen oder sie schlicht den Eindruck haben, dass weitere Bemühungen sich nicht mehr lohnen, weil der Arbeitsaufwand zu groß wird.

2.2. Verantwortung?

Zum Schluss der einleitenden Überlegungen zur Modellierung weise ich noch darauf hin, dass mit der Tätigkeit des (mathematischen) Modellierens mehr Verantwortung für die Resultate verbunden ist, als üblicherweise bei Übungs- oder Rechenaufgaben. Wenn ein Algorithmus für die nächste Leistungsüberprüfung geübt wird, kommt es nur darauf an, ob das Ergebnis stimmt, nicht aber, was es für die Realität bedeutet oder welche Konsequenzen für die betroffenen Menschen aus der Anwendung dieses Resultates folgen (können). Ganz anders ist es bei einer Profimodellierung: Wenn die Belastbarkeit einer Brücke oder eines tragenden Seiles bei einer Seilbahn falsch modelliert und berechnet wurde, können die Folgen katastrophal sein – ebenso wie bei einem an einseitigen Interessen orientierten volkswirtschaftlichen Modell, das zu Gesetzen (für Steuern, Umweltbelastungen oder Subventionen) führt, die langfristig schlimme Folgen (für wen?) haben. Den Schülerinnen und Schülern ist nicht neu und unbekannt, dass ihre Handlungen in der realen Welt Konsequenzen haben (können), für die sie sich verantworten müssen. Neu ist für viele von ihnen nur, dass im realitätsbezogenen Mathematikunterricht die Resultate ihrer Bemühungen Konsequenzen wie im realen Leben außerhalb des Schulunterrichts haben (können, vgl. Maaß 2015).

2.3. Realitätsbezug als Zielwandel

Mit dem folgenden kleinen Beispiel möchte ich deutlich machen, was in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht ungewohnt ist. Bekannt ist eine Textaufgabe dieser Art: Heinrich möchte ein Buch kaufen, das 14,90 Euro kostet. Er hat 20 Euro. Wie viel Geld bleibt ihm?

Ich schlage vor, eine solche Aufgabenstellung zu verwenden: Heinrich hat zum Geburtstag ein Buch von Astrid Lindgren geschenkt bekommen: „Karlsson vom Dach", das er gern gelesen hat. Nun hat er im Internet ein weiteres Buch von Astrid Lindgren entdeckt: „Geschichten aus Bullerbü". Die Geschichten kosten 14,90 Euro. Heinrich hat noch die 20 Euro, die ihm sein Onkel zum Geburtstag geschenkt hat. Was soll Heinrich tun? Besprecht in Kleingruppen, welchen Rat ihr Heinrich geben wollt!

In der üblichen Form ist es eine eingekleidete Rechenaufgabe. Mit etwas Übung ist nicht schwer, die Rechenaufgabe aus dem – für die eigentlich wichtige Rechnung – unbedeutenden Kontext zu lösen. In der zweiten Formulierung ist das eigentlich wichtige Ziel das reale Anliegen von Heinrich (ein zweites Buch derselben Autorin zu lesen), das auf verschiedene Weisen erreicht werden kann. Heinrich kann das Buch leihen, es gebraucht kaufen, es auf den Wunschzettel zu Weihnachten schreiben, tatsächlich einen Teil seines Geldes für die Bestellung im Internet ausgeben. Die Rechnung 20 – 14,90 ist dabei eine Entscheidungshilfe – wie im realen Leben ersetzt Mathematik nicht die Entscheidung, sondern unterstützt eine rationale Überlegung.

Wenn das im Unterricht deutlich wird, haben die Schülerinnen und Schüler etwas ganz Wichtiges über Mathematik gelernt.

2.4. Lesekompetenz fördern im Mathematikunterricht?

Nun gibt es von Seiten vieler Mathematiklehrerinnen und -lehrer einen wichtigen Einwand gegen die zweite Art (in 2.3.), eine Aufgabe zu formulieren. Sie enthält zu viel Text! Diese Mathematiklehrerinnen und -lehrer weisen zu Recht darauf hin, dass Österreich in internationalen Vergleichstests u. a. deshalb nicht so gut abschneidet, weil es den Schülerinnen und Schülern an Lesekompetenz fehlt. Sie können ihre Stärken, das Ausrechnen, nicht so gut ausspielen, weil sie dem Aufgabentext nicht hinreichend gut entnehmen können, was sie eigentlich ausrechnen sollen.

Wenn diese These richtig ist, bleibt die Frage, wie wir damit umgehen. Sollen wir einfach hinnehmen, dass die Testergebnisse schlecht bleiben (mit dem Hinweis: das interessiert eh nur die Leute, die über den „Wirtschaftsstandort Österreich" am Sonntag im Fernsehen reden)? So einfach geht es nicht. Wozu brauchen Menschen eine mathematikspezifische Lesekompetenz, die sie nur im Mathematikunterricht erwerben können? Immer, wenn es im realen Leben um Geldgeschäfte geht (Bank, Versicherung, Kauf, Leihen…) oder um Tarife (Strom, Gas, Handy, Transport…), gibt es lange Texte mit kleingedrucktem mathematikhaltigem Text. Wie sollen die Menschen damit umgehen? Sollen sie den Verkäufern (und Verkäuferinnen) von Krediten, Versicherungen, Autos, Wohnungen, Handyverträgen etc. einfach glauben, dass ihnen gerade ein günstiges Angebot gemacht wird, das sie nur noch zu unterschreiben brauchen? Sollen sie jeweils vor so einer Entscheidung ihren ehemaligen Mathematiklehrer (bzw. die Lehrerin) anrufen, um zu fragen was sie ausrechnen müssen, um ein Angebot kritisch zu prüfen? Oder sollen sie in der Lage sein, solch eine Prüfung selbstständig durchzuführen? Wer für die erste Möglichkeit plädiert, spricht im Grunde genommen für die Abschaffung des Mathematikunterrichts. Wer für die zweite Art des Umgangs ist, freut sich auf eine große Anzahl täglicher Anrufe und wer für die dritte Option ist, sieht sich in vollständiger Übereinstimmung mit den Lehrplänen für

Mathematikunterricht und allen anderen Äußerungen der Regierung zu den Bildungszielen der Schulen.

Wer aber die allgemeinen und spezifischen Lehrziele des Mathematikunterrichts zu seinen Unterrichtszielen macht (also den Dienstvertrag erfüllen möchte), muss das Lesen und Verstehen mathematikhaltiger Texte aus dem täglichen Leben üben.

3. Beispiele für realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Wer realitätsbezogen Mathematik unterrichten möchte und dazu nach Unterrichtsvorschlägen, Materialien und Erfahrungen sucht, findet bei der MUED (wie MathematikUnterrichtsEinheitenDatei – www.mued.de), in den ISTRON-Bänden (https://userpages.uni-koblenz.de/~istron/home/) oder in fachdidaktischen Zeitschriften sehr viele Ideen und Anregungen. An dieser Stelle möchte ich eine weitere Quelle vorstellen, nämlich Diplomarbeiten, die ein Thema bzw. einen Themenbereich ausführlicher erläutern. Die in den letzten Jahren geschrieben Diplomarbeiten aus Linz, von denen ich einige ganz kurz erwähnen möchte, finden sich unter http://epub.jku.at/nav/classification/111084.

3.1. Mit der Sonde „New Horizons“ zum Pluto (Mag.ª M. Spiegl)

In vielen Medien wurde an prominenter Stelle berichtet, dass am 14. Juli 2015 die Raumsonde „New Horizons“ als erstes von Menschen gebautes Raumfahrzeug Pluto erreichte. Aus der Nähe wurden beim Vorbeiflug schöne Bilder gemacht und zur Erde gesendet: Abb. 4.

Abb. 4: Ein Erfolg der Mathematik (http://www.delmarvalife.com/delmarvalife/out-and-about/help-name-a-surface-feature-on-pluto-nasas-new-horizons-space-mission/#prettyPhoto/0/)

Was hat diese bemerkenswerte wissenschaftlich-technische Leistung mit Mathematik zu tun? In den Medien wird die gelungene Mission jedenfalls nicht als Erfolg der Mathematik beschrieben; Mathematik wird nicht einmal erwähnt. Das ist ein typisches Phänomen: Mathematik ist die unsichtbare und nicht bekannte Basis fast aller naturwissenschaftlich-technischer Erfolge. Wer nur ein wenig über diese Sonde nachdenkt, wird sicher erkennen, dass die Sonde ohne Mathematik nie gebaut oder zielgerecht auf die Reise geschickt werden könnte.

Beim Bau kommt mathematische Technologie in vielfältiger Weise zum Einsatz, wenn das optimale Gewicht kalkuliert wird, die Form der Linsen für die Aufnahmen, die Steuerung der Kamera und der

Sonde selbst, die Eigenschaften der Materialien und ihre Veränderungen unter den Belastungen im All (die ihrerseits mit mathematischen Formeln beschrieben werden).

Der Flug der Sonde wird selbstverständlich berechnet, bevor sie gestartet wird. Schließlich soll sie am Ende des Fluges dort sein, wo Pluto ist (und nicht, wo er beim Start ist). Zwischendurch soll es keine Kollisionen mit Saturn oder anderen Objekten geben, aber ein „Swing-By-Manöver" am Jupiter – das ganz exakt berechnet werden muss, damit aus dem Vorbeiflug kein Landeanflug wird und anschließend die Richtung stimmt. Wo tatsächlich überall ganz selbstverständlich Mathematik eingesetzt wird, damit die Sonde finanziert und gebaut werden kann, starten kann, zum richtigen Zeitpunkt funktionstüchtig am richtigen Ort sein wird etc. ist eine große und spannende Recherche wert.

Weshalb soll nun dieser Erfolg im Mathematikunterricht thematisiert werden? Zum einen ist es eine wunderbare Gelegenheit, mit Stolz über eine besondere Leistung zu berichten, die ohne Mathematik nicht möglich wäre. Mathematik braucht ein positives Image, das Stück für Stück aufgebaut werden kann. Zum anderen können wir an diesem Beispiel lernen, dass wir mit etwas Mut auch sehr komplizierte Dinge wie in diesem Beispiel die Bewegung der Sonde recht einfach und mit einer gewissen Genauigkeit modellieren können.

Nehmen wir als allererstes Modell sehr stark vereinfacht an, die Entfernung von der Erde zum Pluto sei etwa 5.000.000.000 km und die Flugzeit betrug etwa 10 Jahre. Dann errechne ich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa 15,85 km/sec und bin erstaunlich nahe bei den realen 16,21 km/sec. Nun kann schrittweise genauer modelliert werden: Erde und Pluto bewegen sich auf Kreisen (genauer Ellipsen), die nicht parallel bzw. in einer Ebene liegen; das „Swing-By-Manöver" führt am Jupiter vorbei, der Weg von der Erde zum Jupiter wurde mit „nur" etwas über 14 km/sec zurückgelegt etc. Außerdem kann noch überlegt werden, wie nahe die Sonde auf ihrem Weg an anderen Körpern im Sonnensystem vorbeifliegt: Gibt es eine Kollisionsgefahr? All das lässt sich in der Sek I. durchführen. Das Beispiel bietet auch vielfältige Gelegenheiten, die Auswirkungen kleiner Fehler zu Beginn einzuschätzen und nachzurechnen: Wie weit trifft die Sonde daneben, wenn der Startwinkel um ein Grad (1/100 Grad) daneben liegt? Welche Folgen haben ein paar km/h mehr oder weniger?

3.2. Mathematik und Kunst: Das Bild „Strahlender September" (Mag.[a] R. Fellner)

Viele Künstlerinnen und Künstler haben ihre Werke ganz bewusst mit Hilfe der Mathematik gestaltet (ich erinnere an E. Dürer oder M.C. Escher oder die Schule der konkreten Kunst), eine Reihe von Mathematikunterrichtsvorschlägen dazu (insbesondere zum Goldenen Schnitt) sind bekannt. Frau Fellner hat ein Beispiel gewählt (Abb. 5), das mit sehr elementaren geometrischen Mitteln analysiert werden kann.

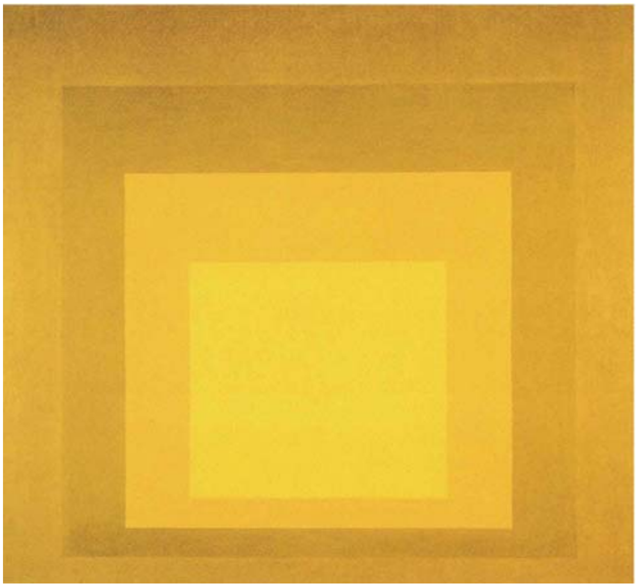
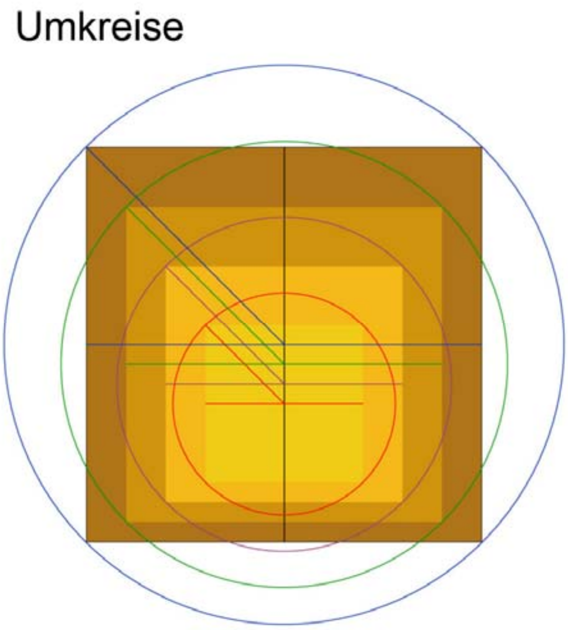


Abb. 5: Strahlender September (Institut für Mathematik der Universität Würzburg, 2014, S. 134)

Nach einer Phase der Analyse mit Hilfslinien und gezielten Veränderungen des Ausgangsbildes ist auch eine kreative Phase möglich (Abb. 6): Skizzieren Sie nach diesem Vorbild eine Folge von Quadraten (Rechtecken, Kreisen…), die ineinander gezeichnet den Eindruck eines seitlich oder nach oben geneigten Tunnels erwecken. Dazu noch ein Literaturtipp: Jan Wörler hat in seiner Dissertation systematisch „Konkrete Kunst als Ausgangspunkt für mathematisches Simulieren und Modellieren" untersucht (Wörler 2015).



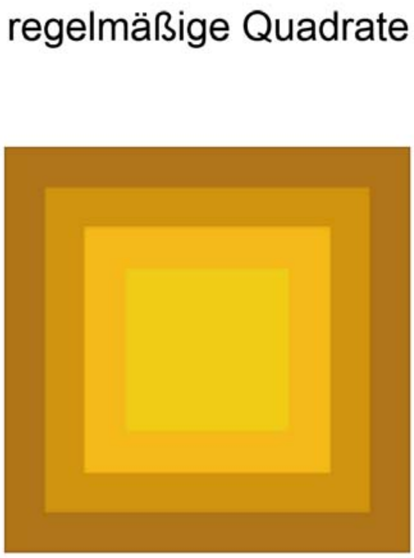


Abb. 6: Variationen zum Bild „Strahlender September"

3.3. Black Jack: Weshalb hat die Bank Vorteile? (Mag. A. Wamser)

Glücksspiel in der Schule? Das klingt auf den ersten Blick verdächtig. Schließlich ist nicht nur aus der Literatur bekannt, wie Menschen durch Spielsucht in den Ruin getrieben werden. In den Medien finden sich viele Berichte über Menschen, die Hab und Gut verspielt haben und deswegen kriminell geworden sind, um das Geld (etwa aus der Firmenkasse) zurückzugeben, das sie verspielt haben. Sogar Jugendliche und Kinder haben oft schon Geld im Internet verspielt, z. B. im Online-Kasino. Damit wird das zentrale pädagogische Motiv einer solchen Unterrichtseinheit klar: Wer verstanden hat, dass langfristig immer die Bank gewinnt, ist weniger anfällig für Glücksspielsucht.

Im Unterricht ist es nicht sehr schwer, die Wahrscheinlichkeit des Erreichens oder Überschreitens einer bestimmten Punktzahl bei Black Jack zu berechnen. Ein didaktischer Tipp dazu ist es, zunächst die Situation etwas zu vereinfachen, indem die Anzahl der Karten reduziert wird. Auch ein Computereinsatz ist sinnvoll. Herr Wamser hat in einer Tabellenkalkulation Kartenverteilungen simuliert und dabei ziemlich genau jene Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Konstellationen herausbekommen, die in einer gründlichen mathematischen Analyse (von Bewersdorf 2012) gefunden wurden (Abb. 7).

Es ist ihm auch gelungen, die für Mitarbeiter der Bank festgelegte Regel, nur bis einschließlich 16 Punkten noch weitere Karten zu ziehen, im Mathematikunterricht plausibel zu begründen.

Simulation		Bewersdorff	
Bankergebnis	Wahrscheinlichkeit	Bankergebnis	Wahrscheinlichkeit
>21	0,2811	>21	0,2816
Black Jack	0,0472	Black Jack	0,0473
21	0,0730	21	0,0727
20	0,1808	20	0,1803
19	0,1332	19	0,1335
18	0,1391	18	0,1395
17	0,1456	17	0,1451

Abb. 7: Selbstgestrickte Computersimulation

3.4. Wahlmathematik: Wie werden aus Stimmen Sitze? (Mag. L. Strobl)

Mathematik sei unpolitisch, wird oft gesagt, wenn über den allgemeinen Teil der Lehrpläne diskutiert wird, in dem auch politische Bildung gefordert wird. Wer genauer darüber nachdenkt, auf welche Weise aus den bei einer Wahl abgegebenen Stimmen die entscheidenden Sitze im National-rat/Gemeinderat etc. vergeben werden, kommt auf mathematisch und politisch interessante Inhalte.

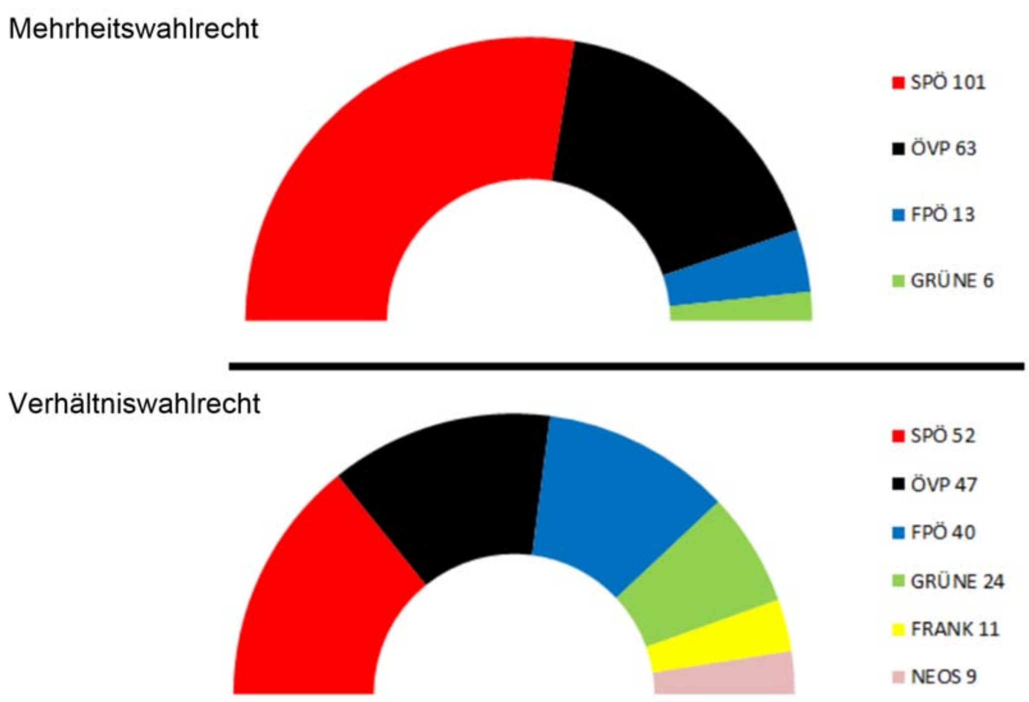


Abb. 8: Mehrheits- und Verhältniswahlrecht

Die mathematischen Verfahren, nach denen hier gerechnet und verteilt wird, werden als Teil des Wahlrechtes eines Landes beschlossen. Ein Vergleich solcher Wahlgesetze in verschiedenen Ländern zeigt deutliche Unterschiede. Wer nach den Vorstellungen und Absichten fragt, die zur Formulierung unterschiedlicher Wahlgesetze führen, stößt auf Grundsatzüberlegungen zur Funktionsfähigkeit von Regierungen und zur Balance von Machtverteilung. Kurz gesagt: Ein Mehrheitswahlrecht, bei dem in einem Wahlkreis ein Sitz an den/die Partei mit den meisten Stimmen vergeben wird führt zur Stärkung der größeren Parteien. Ein Verhältniswahlrecht berücksichtigt auch die Stimmen, die in einem Wahlkreis nicht für den/die Gewinner abgegeben wurden und stärkt so die „Kleinen". Das wird aus der Grafik (Abb. 8) zur letzten Wahl in Österreich deutlich.

Wer einmal begonnen hat zu begreifen, dass Wahlgesetze nicht objektiv und eindeutig für alle Länder gleich von der Mathematik festgelegt werden, sondern mit Mehrheitsbeschlüssen von Parlamenten beschlossen werden, kann diese Variabilität auch im Unterricht zum Thema machen. Beispiel: In einer Wahl erhielten Partei A 30%, Partei B 25%, Partei C 20%, Partei D 14% und die Parteien E und F jeweils 3% der Stimmen (5% der Stimmen waren ungültig).

Aufgabe: Formulieren Sie ein Wahlgesetz, das zu folgender gewünschten Sitzverteilung führt: Die Parteien A, B und C erhalten gleich viele Sitze, die anderen Parteien gar keine! Sie können sich auch gern andere Sitzverteilungen wünschen und entsprechende Wahlgesetze dazu formulieren lassen.

3.5. Der Traum vom Fliegen: Ein projektorientierter Wettbewerb mit Papierfliegern für die Schule (Mag.ª I. Berger)

Normalerweise ist es ein deutlicher Hinweis auf pädagogische Probleme, wenn im Mathematikunterricht Papierflieger gebastelt und auf die Reise gesendet werden. Frau Berger hat gezeigt, wie aus einem Alarmzeichen ein motivierender Mathematikunterricht wird: Ein Wettbewerb wird durchgeführt. Auf dem Wege zum besten Flieger lässt sich etwas über Fliegen (Auftrieb, Stabilität, günstiger Abwurfwinkel u. v. a.) lernen, indem probiert, gemessen und ausgewertet wird. So ist am Schluss der Wettbewerbssieger kein Zufallsgewinner, sondern jemand, der oder die methodisch geschickt einen optimalen Papierflieger erarbeitet.

Eine von vielen möglichen Stationen auf dem Weg des Lernens ist eine Zwischenbilanz: Vier typische Flugbahnen von Papierfliegern (Abb. 9, vgl. http://brain.exp.univie.ac.at/ypapierflieger/papfs.htm).

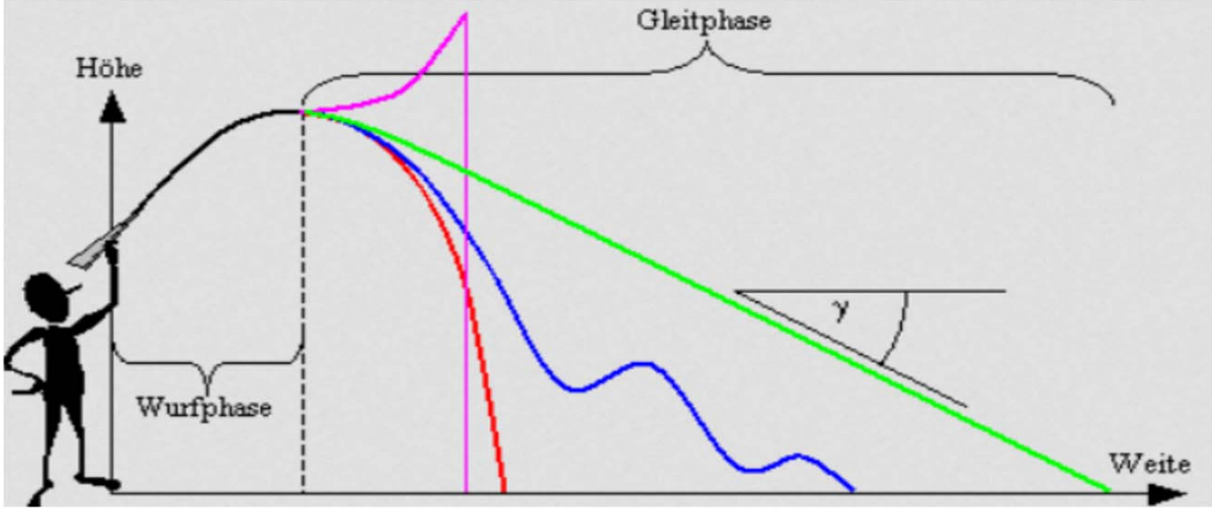
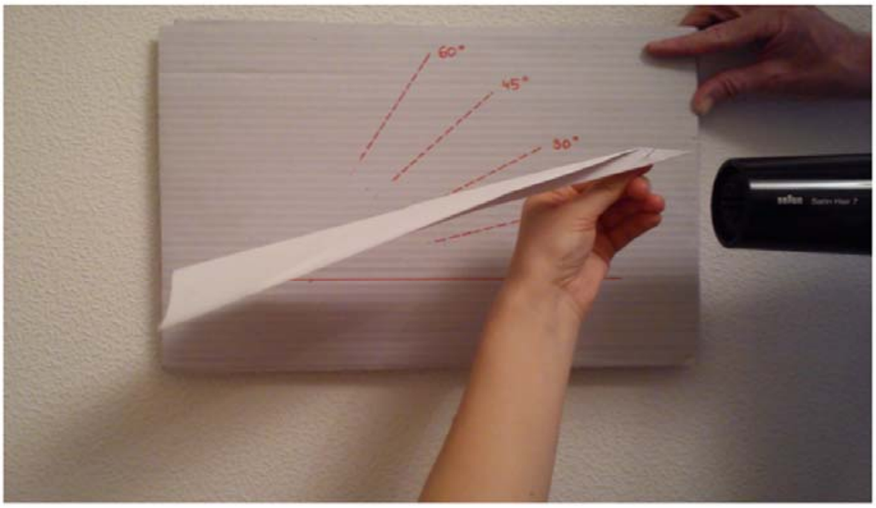


Abb. 9: Auswertung von Versuchen zum Flugverhalten

Das Thema bietet auch eine Vielzahl von Möglichkeiten für praktische Versuche und „wissenschaftliche“ Auswertungen: Abb. 10.



Versuchsaufbau: Anstellwinkel und Luftströmung beim Papierflieger

Abb. 10: praktischer Versuchsaufbau

3.6. Der Mathematik nachgeschnüffelt (Mag.ª M. Hackl)

Wer schnüffelt? Richtig: Ein Hund (Abb. 11)! Was haben Haustiere und andere Tiere im Mathematikunterricht zu suchen? Sie geben Motivation und Anlass, viele kleine Statistiken zu erstellen und zu diskutieren. Das jeweils gesuchte Ergebnis ist (hoffentlich) für die Lernenden wichtig. Deshalb ist das Erlernen und Erstellen der Statistik viel einfacher als im üblichen Unterricht.

Abb. 11: Hundenase

Frau Mag.[a] Hackl hat übers Internet (social media) erforscht, wie das Verhältnis von Nasenlänge und Schulterhöhe bei verschiedenen Hunderassen ist und konnte – auf der Basis ihrer gesammelten Daten und einschlägiger Literatur – tatsächlich typische Beziehungen feststellen. Andere Themen für Daten über Haustiere sind z. B. Zeit und Geld: Wie viel Zeit verbringe ich mit meinem Haustier (bzw. der Nachbar mit seinem Haustier)? Wie viel Zeit erfordert die Pflege? Wie viel kostet das Tier im Jahr (Futter, Medizin, Sonstiges)?

Der zentrale Unterschied zu typischen Statistiken im Mathematikunterricht ist der persönliche Bezug. In diesem Fall sind die Ergebnisse nicht nur wichtig, weil die Lehrkraft „richtig“ oder „falsch“ dazu sagt, sondern weil sie etwas dazu beitragen, das eigene Leben mit Haustieren (bzw. den vielleicht sehnsüchtig gewünschten Besitz eines Haustieres) besser zu verstehen.

3.7. Die Mathematik zum Klingen bringen – ein Fächer übergreifendes Unterrichtsprojekt (Mag.[a] T. Wassermair)

Über die Zusammenhänge zwischen Mathematik und Musik ist schon nachgedacht worden – gerade hier in Wien. Ich erinnere nur an den Kollegen E. Neuwirth (http://homepage.univie.ac.at/erich.neuwirth/php/homepage/doku.php). Mag.[a] T. Wassermair hat einen eigenen Zugang gewählt, ausgehend von einem Musiker namens Tom Johnson (https://de.wikipedia.org/wiki/Tom_Johnson_(Komponist)), der nicht nur den kombinatorischen Tango geschrieben hat, von dem Frau Wassermair ausgeht, sondern auch z.B. eine Riemannoper. Hier zunächst für die Freunde des Tangos ein Notenausschnitt: Abb. 12.

Abb. 12: http://www.editions75.com/FreeScores/TomJohnson(piano).pdf

Wie wird daraus ein Mathematikunterrichtsprojekt? Der Vorschlag ist, die Grundidee des Tangos zu nehmen, also wenige Noten, die in beliebiger Reihenfolge „gut“ klingen kombinatorisch zu einem Stück zu verbinden. Ziel kann ein Lied sein, das von der Schulklasse komponiert und mit Text versehen wird.

4. Resümee und Ausblick

Am Ende eines Vortrages oder Aufsatzes bleibt immer das Gefühl, nicht alles gesagt oder geschrieben zu haben, was eigentlich dazu gehört. Das ist übrigens unabhängig von der Vortragszeit oder der Textlänge. Aber es bleibt die Hoffnung, Neugier geweckt zu haben und den Wunsch, selbst einmal im Unterricht etwas auszuprobieren, was von der Routine abweicht und der Lehrkraft sowie den Lernenden Freude an der Mathematik vermittelt. Wenn Sie dazu besser ausgearbeitete Unterrichtsvorschläge zum realitätsbezogenen Mathematikunterricht, eigene Ideen und Erfahrungen oder ganz allgemein Anmerkungen zur Thematik haben, senden Sie mir bitte ein Mail: juergen.maasz@jku.at!

Literatur

Bewersdorff, Jörg: Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen, Springer Berlin 2012

Institut für Mathematik der Universität Würzburg; Museum im Kulturspeicher Würzburg: Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst. Spurbuchverlag, Würzburg 2014

Kaiser, Gabriele und Henn, Hans-Wolfgang: Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht: Festschrift zum 70. Geburtstag von Werner Blum, Springer-Verlag, 2015

Maaß, Jürgen: Was bleibt? Erfolge und Mißerfolge des Mathematikunterrichts aus der Sicht von Erwachsenen, in: Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft **22** (Wien 1994), S. 108–131

Maaß, Jürgen: Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, Reihe „Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik“, WTM, Münster 2015

Wörler, Jan: Konkrete Kunst als Ausgangspunkt für mathematisches Simulieren und Modellieren, WTM, Münster 2015